2010年全国硕士研究生入学统一考试
数学（三）试题及参考答案

一、选择题（1~8小题，每小题4分，共32分，下列每题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，把所选项前的字母填在答题纸指定的位置上）

（1）若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)\mathrm{e}^{x}\right]=1$，则 $a=$（　　）

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

（2）设函数 y_1，y_2 是一阶非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若常数 λ，μ 使得 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则（　　）

（A）$\lambda=\dfrac{1}{2}$，$\mu=\dfrac{1}{2}$　（B）$\lambda=-\dfrac{1}{2}$，$\mu=-\dfrac{1}{2}$　（C）$\lambda=\dfrac{2}{3}$，$\mu=\dfrac{1}{3}$　（D）$\lambda=\dfrac{2}{3}$，$\mu=\dfrac{2}{3}$

（3）设函数 $f(x)$、$g(x)$ 具有二阶导数，且 $g(x_0)=a$，$g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值，则 $f[g(x)]$ 在 x_0 处取得极大值的一个充分条件是（　　）

（A）$f'(a)<0$　（B）$f'(a)>0$　（C）$f''(a)<0$　（D）$f''(a)>0$

（4）设 $f(x)=\ln^{10}x$，$g(x)=x$，$h(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时有（　　）

（A）$g(x)<h(x)<f(x)$　（B）$h(x)<g(x)<f(x)$

（C）$f(x)<g(x)<h(x)$　（D）$g(x)<f(x)<h(x)$

（5）设向量组 $I:\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 可由向量组 $II:\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ 线性表示，下列命题正确的是（　　）

（A）若向量组 I 线性无关，则 $r\le s$　（B）若向量组 I 线性相关，则 $r>s$

（C）若向量组 II 线性无关，则 $r\le s$　（D）若向量组 II 线性相关，则 $r>s$

（6）设 A 是4实对称矩阵，且 $A^2+A=0$，若 $R(A)=3$，则 A 相似于（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　（D）

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

（7）设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0\ ,\ x<0 \\ \dfrac{1}{2}\ ,\ 0\le x<\dfrac{1}{2} \\ 1-\mathrm{e}^{-x}\ ,\ x\ge\dfrac{1}{2} \end{cases}$，则 $P\{X=1\}=$（　　）

（A）0　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）$\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$　　（D）$1-\mathrm{e}^{-1}$

（8）设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度函数，$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度函数，若 $f(x)=\begin{cases} af_1(x)\ ,\ x\le 0 \\ bf_2(x)\ ,\ x>0 \end{cases}$（$a>0$，$b>0$），则 a，b 满足（　　）

（A）$2a+3b=4$　（B）$3a+2b=4$　（C）$a+b=1$　（D）$a+b=2$

二、填空题（9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上）

（9）设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x x\sin t^2\mathrm{d}t$ 所确定，则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$(　　)

（10）设位于曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}$（$\mathrm{e}\le x<+\infty$）下方，$x$ 轴上方的无界区域为 G，则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为(　　)

（11）设某商品的收益函数为 $R(p)$，收益弹性为 $1+p^3$，其中 p 为价格，$R(1)=1$，则 $R(p)=$

(______)

（12）若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b=$________

（13）设 A，B 为3阶矩阵，且 $|A|=3$，$|B|=2$，$|A^{-1}+B|=2$ 则 $|A+B^{-1}|=$________

（14）设 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$（$\sigma>0$）的简单随机样本，统计差 $T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}$，则 $ET=$(　　)

三、解答题（15～23 小题，共 94 分，请将解答写在答题纸指定的位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

（15）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$。

（16）（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成。

（17）（本题满分 11 分）

求函数 $M=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值。

（18）（本题满分 10 分）

（I）比较 $\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|dt$ （$n=1,2,3,...$）；

（II）记 $u_n=\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n \mathrm{d}t$ （$n=1,2,3,...$），求 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$。

（19）（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 内连续，在 $(0,3)$ 内存在二阶导数，且 $2f(0)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3)$。

（I）证明：存在 $\eta\in(0,2)$，使得 $f(\eta)=f(0)$；

（II）证明：存在 $\xi\in(0,3)$，使得 $f''(\xi)=0$。

（20）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，已知线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解。

（I）求 $\boldsymbol{\lambda}$，$\boldsymbol{a}$；（II）求 $Ax=b$ 的通解。

（21）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$，正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为对角矩阵，若 Q 的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，求 a，Q。

（22）（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2}，\ -\infty<x<+\infty，\ -\infty<y<+\infty。$$

求 A 及 $f_{Y|X}(y|x)$。

（23）（本题满分 11 分）

箱内有 6 个球，其中红、白、黑球的个数分别为 1、2、3 个，现从箱中随机取出 2 个球，设 X 为取出的红球个数，Y 为取出的白球个数。

（I）求随机变量 (X,Y) 的概率分布；（II）求 $Cov(X,Y)$。