2013年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题:1～8小题，每小题4分，共32分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合

题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1、已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 k,c 为常数，且 $c\neq 0$，则（　）

（A）$k=2,c=-\dfrac{1}{2}$　　　（B）$k=2,c=\dfrac{1}{2}$

（C）$k=3,c=-\dfrac{1}{3}$　　　（D）$k=3,c=\dfrac{1}{3}$

2、曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 的切平面方程为（　）

（A）$x-y+z=-2$　　　（B）$x+y+z=0$

（C）$x-2y+z=-3$　　　（D）$x-y-z=0$

3、设 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx(n=1,2,\cdots)$，令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，则（　）

（A）$\dfrac{3}{4}$　　（B）$\dfrac{1}{4}$　　（C）$-\dfrac{1}{4}$　　（D）$-\dfrac{3}{4}$

4、设 $L_1:x^2+y^2=1$，$L_2:x^2+y^2=2$，$L_3:x^2+2y^2=2$，$L_4:2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线，记 $I_i=\int_{L_i}(y+\dfrac{y^3}{6})dx+(2x-\dfrac{x^3}{3})dy(i=1,2,3,4)$，则

$\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$（　）

（A）I_1　　（B）I_2　　（C）I_3　　（D）I_4

5、设A、B、C均为n阶矩阵，若AB=C，且B可逆，则（　）

（A）矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

（B）矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

（C）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

（D）矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

6、矩阵$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$相似的充分必要条件是（　）

（A）$a=0,b=2$

（B）$a=0,b$ 为任意常数

（C）$a=2,b=0$

（D）$a=2,b$ 为任意常数

7、设x_1,x_2,x_3是随机变量，且$x_1\sim N(0,1)$，$x_2\sim N(0,2^2)$，$x_3\sim N(5,3^2)$，

$P_j=P\left\{-2\le x_j\le 2\right\}(j=1,2,3)$，则（　）

（A）$P_1>P_2>P_3$　　　（B）$P_2>P_1>P_3$

（C）$P_3>P_1>P_2$　　　（D）$P_1>P_3>P_2$

8、设随机变量$X\sim t(n)$，$Y\sim F(1,n)$，给定$\alpha(0<\alpha<0.5)$，常数c满足$P\left\{X>c\right\}=2$

，则$P\left\{Y>c^2\right\}=$（　）

（A）α　　（B）$1-\alpha$　　（C）2α　　（D）$1-2\alpha$

二、填空题：9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

9、设函数$y=f(x)$由方程$y-x=e^{x(1-y)}$确定，则$\lim\limits_{n\to\infty}n(f(\frac{1}{n})-1)=$______.

10、已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^x-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，则该方程的通解为 $y=$______.

11、设 $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$（$t$ 为参数），则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$______.

12、$\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$______.

13、设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若

$a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则 $|A|=$______.

14、设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，a 为常数且大于零，则

$P\{Y\le a+1|Y>a\}=$______.

三、解答题：15～23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15、（本题满分 10 分）

计算 $\int_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$，其中 $f(x)=\int_1^x\dfrac{\ln(t+1)}{t}dt$.

16、（本题满分 10 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_0=3$，$a_1=1$，$a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\ge 2)$，$S(x)$ 是幂级数

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

（Ⅰ）证明：$S^n(x)-S(x)=0$；（Ⅱ）求 $S(x)$ 的表达式.

17、（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=(y+\dfrac{x^3}{3})e^{x+y}$ 的极值.

18、（本题满分 10 分）

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

（Ⅰ）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；

（Ⅱ）存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

19、（本题满分 10 分）

设直线 L 过 $A(1,0,0)$，$B(0,1,1)$ 两点，将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ，Σ 与平面 $z=0$，$z=2$ 所围成的立体为 Ω.

（Ⅰ）求曲面 Σ 的方程；（Ⅱ）求 Ω 的形心坐标.

20、（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$，并求所有矩阵 C.

21、（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)$，记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}$，

$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$

（Ⅰ）证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$；

（Ⅱ）若 α,β 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$

22、（本题满分 11 分）

设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}x^2, & 0<x<3, \\ 0, & 其他\end{cases}$，令随机变量$Y=\begin{cases}2, & x\le 1, \\ x, & 1<x<2, \\ 1, & x\ge 2\end{cases}$

（Ⅰ）求Y的分布函数；（Ⅱ）求概率$P\left\{X\le Y\right\}$.

23、（本题满分 11 分）

设总体X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0, \\ 0, & 其他\end{cases}$，其中$\theta$为未知参数且大于零，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本.

（Ⅰ）求θ的矩估计量；（Ⅱ）求θ的最大似然估计量.