2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的

(1)若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, x>0\\ b, x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则（ ）

（A） $ab=\dfrac{1}{2}$　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$　(C) $ab=0$　(D) $ab=2$

(2)二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点（ ）

（A） $(0,0)$　(B) $(0,3)$　(C) $(3,0)$　(D) $(1,1)$

(3)设函数 $f\left(x\right)$ 可导，且 $f\left(x\right)f'\left(x\right)>0$ 则（ ）

（A） $f\left(1\right)>f\left(-1\right)$　(B) $f\left(1\right)<f\left(-1\right)$

(C) $\left|f\left(1\right)\right|>\left|f\left(-1\right)\right|$　(D) $\left|f\left(1\right)\right|<\left|f\left(-1\right)\right|$

(4)若级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left[sin\dfrac{1}{n}-kln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]$ 收敛，则 $k=(\ \ )$

(A)1　(B)2　(C)-1　(D)-2

(5)设 α 为 n 维单位列向量，E 为 n 阶单位矩阵，则

(A) $E-\alpha\alpha^T$ 不可逆　(B) $E+\alpha\alpha^T$ 不可逆

(C) $E+2\alpha\alpha^T$ 不可逆　(D) $E-2\alpha\alpha^T$ 不可逆

(6)已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$　$B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，则

(A) A 与 C 相似，B 与 C 相似

(B) A 与 C 相似，B 与 C 不相似

(C) A 与 C 不相似，B 与 C 相似

(D) A 与 C 不相似，B 与 C 不相似

(7)设 A、B C 为三个随机事件，且 A 与 C 相互独立，与 C 相互独立，则 $A\cup B$ 与 C 相互独立的充要条件是

(A) A 与 B 相互独立

(B) A 与 B 互不相容

(C) AB 与 C 相互独立

(D) AB 与 C 互不相容

(8)设 $X_1, X_2......X_n (n\geq 2)$ 来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

则下列结论中不正确的是：

(A) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布

(B) $2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布

(C) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布

(D) $n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分。

(9) $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})dx=$

(10) 差分方程 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的通解 $y_t=$

(11) 设生产某产品的平均成本 $\overline{C}(Q)=1+e^{-Q}$，其中 Q 为产量，则边际成本为

(12)设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且

$df(x,y)=ye^y dx+x(1+y)e^y dy, f(0,0)=0$，则 $f(x,y)=$

(13)矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,$ 为线性无关的三维列向量组，则向量组 $A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3,$

的秩为

(14) 设随机变量 x 的概率分布为 $P\left\{X=-2\right\}=\frac{1}{2}$ ，$P\left\{X=1\right\}=a,P\left\{X=3\right\}=b$ ，若

$EX=0$ 则 $DX=$

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15)求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\sqrt{x-te^t}}{\sqrt{x^3}}dt$

(16) 计算积分 $\iint\limits_D\frac{y^3}{\left(1+x^2+y^4\right)^2}dxdy$ ，其中 D 是第一象限中曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴边界的无界区域

(17) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^n\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

(18) 已知方程 $\frac{1}{\ln\left(1+x\right)}-\frac{1}{x}=k$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 内有实根，求 k 的范围

(19)若 $a_0=1$ ，$a_n=0$ ，$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})(n=1,2,3....)$ ，$S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数

(1)证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1

(2)证明 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0$ $x\in(-1,1)$ ，并求 $S(x)$ 的表达式

(20)设 2 阶矩阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$

（I）证 $r\left(A\right)=2$

(II) $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$,求 $AX=\beta$ 的通解

(21)设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$

在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$ 求 a 的值及一个正交矩阵 Q

(22)设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率分布为

$P\left\{X=0\right\}=P\left\{X=2\right\}=\frac{1}{2}$,Y 的概率密度为 $f\left(y\right)=\begin{cases}2y,0<y<1\\0,其他\end{cases}$

(Ⅰ) 求$P\left\{Y \le EY\right\}$

(II)求$Z = X + Y$的概率密度

(23)（本题满分 11 分）

某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量μ是已知的，设 n 次测量结果$x_1, x_2, \cdots, x_n$相互独立，且均服从正态分布$N\left(\mu, \sigma^2\right)$，该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差$z_i = \left|x_i - \mu\right|, \left(i = 1, 2, \cdots, n\right)$，利用$z_1, z_2, \cdots, z_n$估计$\sigma$

(I)求z_1的概率密度

(II)利用一阶矩求σ的矩估计量

(III)求σ的最大似然估计量