



(A) 0 (B) 1

(C) 2 (D) 3

(5) 设函数  $f(\mu, \nu)$  满足  $f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$ , 则  $\left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{\substack{\mu=1 \\ \nu=1}}$  与  $\left.\frac{\partial f}{\partial \nu}\right|_{\substack{\mu=1 \\ \nu=1}}$  依次是

(A)  $\frac{1}{2}, 0$  (B)  $0, \frac{1}{2}$

(C)  $-\frac{1}{2}, 0$  (D)  $0, -\frac{1}{2}$

(6) 设  $D$  是第一象限中由曲线  $2xy = 1, 4xy = 1$  与直线  $y = x, y = \sqrt{3x}$  围成的平面区域, 函数  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 则  $\iint_D f(x, y) dx dy =$

(A)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) r dr$

(B)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) r dr$

(C)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) dr$

(D)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) dr$

(7) 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{bmatrix}$ 。若集合  $\Omega = \{1, 2\}$ , 则线性方程

$Ax = b$  有无穷多解的充分必要条件为

(A)  $a \notin \Omega, d \notin \Omega$  (B)  $a \notin \Omega, d \in \Omega$

(C)  $a \in \Omega, d \notin \Omega$  (D)  $a \in \Omega, d \in \Omega$

(8) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  在正交变换  $x = Py$  下的标准形为  $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ , 其中  $P = (e_1, e_2, e_3)$ , 若  $Q = (e_1, -e_3, e_2)$  在正交变换

$x = Qy$  下的标准形为

(A)  $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$

(B)  $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

(C)  $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

(D)  $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

二、填空题: (9~14) 小题, 每小题 4 分, 共 24 分。

(9) 设  $\begin{cases} x = a \arctan t \\ y = 3t + t^3 \end{cases}$ , 则  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=1} =$

(10) 函数  $f(x) = x^2 2^x$  在  $x = 0$  处的  $n$  阶导数  $f^{(n)}(0) =$

(11) 设函数  $f(x)$  连续,  $\varphi(x) = \int_0^{x^2} x f(t) dt$ . 若  $\varphi(1) = 1$ ,  $\varphi'(1) = 5$ , 则

$f(1) =$

(12) 设函数  $y = y(x)$  是微分方程  $y'' + y' - 2y = 0$  的解, 且在  $x = 0$  处

$y(x)$  取得极值 3, 则  $y(x) =$

(13) 若函数  $z = z(x, y)$  由方程  $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$  确定, 则

$dz|_{(0,0)} =$

(14) 设 3 阶矩阵  $A$  的特征值为 2, -2, 1,  $B = A^2 - A + E$ , 其中  $E$  为 3

阶单位矩阵, 则行列式  $|B| =$

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分。解答应写出文字说明、证明过

程或演算步骤。

(15) 设函数  $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x, g(x) = kx^3$ , 若  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $x \rightarrow 0$  时是等价无穷小, 求  $a, b, k$  的值。

(16) 设  $A > 0$ ,  $D$  是由曲线段  $y = A \sin x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$  及直线  $y = 0, x = \frac{\pi}{2}$  所围成的平面区域,  $V_1, V_2$  分别表示  $D$  绕  $x$  轴与绕  $y$  轴旋转所成旋转体的体积。若  $V_1 = V_2$ , 求  $A$  的值

(17) 已知函数  $f(x, y)$  满足

$$f''_{xy}(x, y) = 2(y+1)e^x, f'_x(x, 0) = (x+1)e^x, f(0, y) = y^2 + 2y$$

求  $f(x, y)$  的极值。

(18) 计算二重积分  $\iint_D x(x+y) dx dy$ ,

$$\text{其中 } D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}$$

(19) 已知函数  $f(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^2} dt + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t} dt$ , 求  $f(x)$  的零点个数

(20) 已知高温物体置于低温介质中, 任一时刻改物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比。现将一初始温度为  $120^\circ\text{C}$  的物体在  $20^\circ\text{C}$  恒温介质中冷却, 30min 后该物体降温至  $30^\circ\text{C}$ , 若要将该物体的温度继续降至  $21^\circ\text{C}$ , 还需冷却多长时间?

(21) 已知函数  $f(x)$  在区间  $[a, +\infty]$  上具有 2 阶导数,  $f(a) = 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$ . 设  $b > a$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(b, f(b))$  处的切线与  $x$  轴

的交点是  $(x_0, 0)$ , 证明  $a < x_0 < b$

(22) 设矩阵  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$ , 且  $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$

(1) 求  $a$  的值;

(2) 若矩阵  $\mathbf{X}$  满足  $\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$ , 其中  $\mathbf{E}$  为三阶单位矩阵, 求  $\mathbf{X}$

(23) 设矩阵  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{bmatrix}$  相似与矩阵  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(1) 求  $a, b$  的值;

(2) 求可逆矩阵  $\mathbf{P}$ , 使  $\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$  为对角矩阵。