2016年考研数学（三)试题

一、　填空题（本题共6小题，每小题4分，满分24分．把答案填在题中横线上）

(1) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 a =______，b =______.

(2) 设函数 $f(u, v)$ 由关系式 $f[xg(y), y] = x + g(y)$ 确定，其中函数 $g(y)$ 可微，且 $g(y) \neq 0$，则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$____.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{x^2}, -\dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{1}{2} \\ -1, x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$，则 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx=$____.

(4) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为____.

(5) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=$_______.

(6) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma^2)$，总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots Y_{n_2}$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，则

$$E\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right]=\underline{\qquad\qquad}.$$

二、选择题（本题共6小题，每小题4分，满分24分．每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界.

(A) $(-1, 0)$.　(B) $(0, 1)$.　(C) $(1, 2)$.　(D) $(2, 3)$.　[　]

(8) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，$g(x)=\begin{cases} f(\frac{1}{x}), x\neq 0 \\ 0, x=0\end{cases}$，则

(A) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点.　(B) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.

(D) $g(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性与 a 的取值有关.　[　]

(9) 设 $f(x) = |x(1-x)|$，则

(A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0, 0)$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(B) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0, 0)$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

[　]

(10) 设有下列命题：

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$ 收敛.

(3) 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛.

则以上命题中正确的是

(A) (1) (2).　　(B) (2) (3).　　(C) (3) (4).　　(D) (1) (4).　　[　　]

(11) 设 $f'(x)$ 在[a , b]上连续，且 $f'(a)>0, f'(b)<0$，则下列结论中错误的是

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(a)$.

(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$.

(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=0$.　　[D]

(12) 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价，则必有

(A) 当 $|A|=a(a\neq 0)$ 时，$|B|=a$.　　(B) 当 $|A|=a(a\neq 0)$ 时，$|B|=-a$.

(C) 当 $|A|\neq 0$ 时，$|B|=0$.　　(D) 当 $|A|=0$ 时，$|B|=0$.　　[　　]

(13) 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*\neq 0$，若 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系

(A) 不存在.　　(B) 仅含一个非零解向量.

(C) 含有两个线性无关的解向量.　　(D) 含有三个线性无关的解向量.　　[　　]

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 $\alpha\in(0,1)$，数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$.　　(B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.　　(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$.　　(D) $u_{1-\alpha}$.　　[　　]

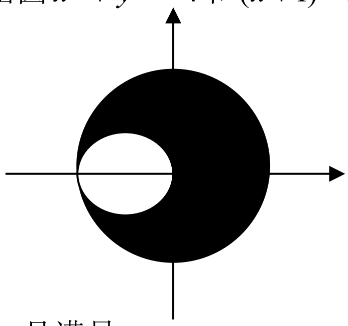
三、解答题(本题共 9 小题，满分 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 8 分)

求 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2})$.

(16)（本题满分 8 分）

求 $\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域(如图).



(17)（本题满分 8 分）

设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且满足

$$\int_a^x f(t)dt \geq \int_a^x g(t)dt,\ x\in[a, b),\ \int_a^b f(t)dt=\int_a^b g(t)dt.$$

证明：$\int_a^b xf(x)dx \leq \int_a^b xg(x)dx$.

(18)（本题满分 9 分）

设某商品的需求函数为 Q = 100 − 5P，其中价格 P ∈ (0 , 20)，Q 为需求量.

(I) 求需求量对价格的弹性 E_d（$E_d>0$）；

(II) 推导 $\frac{dR}{dP}=Q(1-E_d)$（其中 R 为收益），并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时，降低价格反而使收益增加.

(19)（本题满分 9 分）

设级数

$$\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$$

的和函数为 $S(x)$. 求：

(I) $S(x)$ 所满足的一阶微分方程；

(II) $S(x)$ 的表达式.

(20)(本题满分 13 分)

设 $\alpha_1=(1,2,0)^T$，$\alpha_2=(1,\alpha+2,-3\alpha)^T$，$\alpha_3=(-1,-b-2,\alpha+2b)^T$，$\beta=(1,3,-3)^T$，

试讨论当 a,b 为何值时,

(Ⅰ) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示;

(Ⅱ) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表示, 并求出表示式;

(Ⅲ) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 但表示式不唯一, 并求出表示式.

(21)（本题满分 13 分）

设 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

（Ⅰ）求 A 的特征值和特征向量；

（Ⅱ）求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

(22)（本题满分 13 分）

设 A，B 为两个随机事件, 且 $P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(B\mid A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases} 1, & A□□□ \\ 0□ & A□□□□ \end{cases} \qquad Y=\begin{cases} 1, & B□□□ \\ 0□ & B□□□ \end{cases}.$$

求

（Ⅰ）二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；

（Ⅱ）X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}；

（Ⅲ）$Z=X^2+Y^2$ 的概率分布.

(23)（本题满分 13 分）

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x,\alpha,\beta)=\begin{cases} 1-\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, & x>\alpha□ \\ 0□ & x\le\alpha□ \end{cases}$$

其中参数 $\alpha>0,\beta>1$. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,

（Ⅰ）当 $\alpha=1$ 时，求未知参数 β 的矩估计量；

（Ⅱ）当 $\alpha=1$ 时，求未知参数 β 的最大似然估计量；

（Ⅲ）当 $\beta=2$ 时，求未知参数 α 的最大似然估计量.