2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为（）

（A）0
（B）1
（C）2
（D）3

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$

（B）$(-1)^{n}(n-1)!$

（C）$(-1)^{n-1}n!$

（D）$(-1)^{n}n!$

（3）设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+\cdots a_n$，则数列(s_n)有界是数列（a_n）收敛的

(A)充分必要条件.　　　(B)充分非必要条件.

（C）必要非充分条件.　　　（D）即非充分地非必要条件.

（4）设 $I_k=\int_e^k e^{x^2}\ \sin x dx(k=1,2,3)$,则有 D

（A）$I_1< I_2 <I_{3.}$　　　(B) $I_2< I_2< I_{3.}$

(C) $I_1< I_3 <I_{1,}$　　　(D) $I_1< I_2< I_{3.}$

（5）设函数 $f(x,y)$ 可微，且对任意 x,y 都 有$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0, \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$,$f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$成立的一个充分条件是

(A) $x_1> x_{2,}\ y_1< y_{2.}$　　　(B) $x_1> x_{2,}\ y_1>y_{1.}$

(C) $x_1 < x_2, y_1 < y_2.$　　　　　　　(D) $x_1 < x_2, y_1 > y_2.$

（6）设区域 D 由曲线 $y = \sin x, x = \pm\frac{\pi}{2}, y = 1,$ 围成，则 $\iint (x^5 y - 1) dxdy =$(　)

$(A)\pi$　$(B)2$　$(C)-2$　$(D)-\pi$

（7）设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$ 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的是（　　）

（A）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$　　　　（B）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$

（C）$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$　　　　（D）$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

（8）设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$，$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，

$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ 则 $Q^{-1}AQ =$（　　）

（A）$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$　　　　（B）$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$　　　　（D）$\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2 - y + 1 = e^y$ 所确定的隐函数，则 $\frac{dy}{dx} =$ ________。

（10）计算 $\lim_{x \to \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \dots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) =$________。

（11）设 $z = f\left(\ln x + \frac{1}{y} \right)$,其中函数 $f(u)$ 可微，则 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} =$________。

（12）微分方程 $ydx + (x - 3y^2)dy = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为________。

（13）曲线 $y=x^2+x(x<0)$ 上曲率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是________。

（14）设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=3$, A^* 为 A 的伴随矩阵，若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B,则

$|BA^*|=$________。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x,}$，记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

（1）求 a 的值

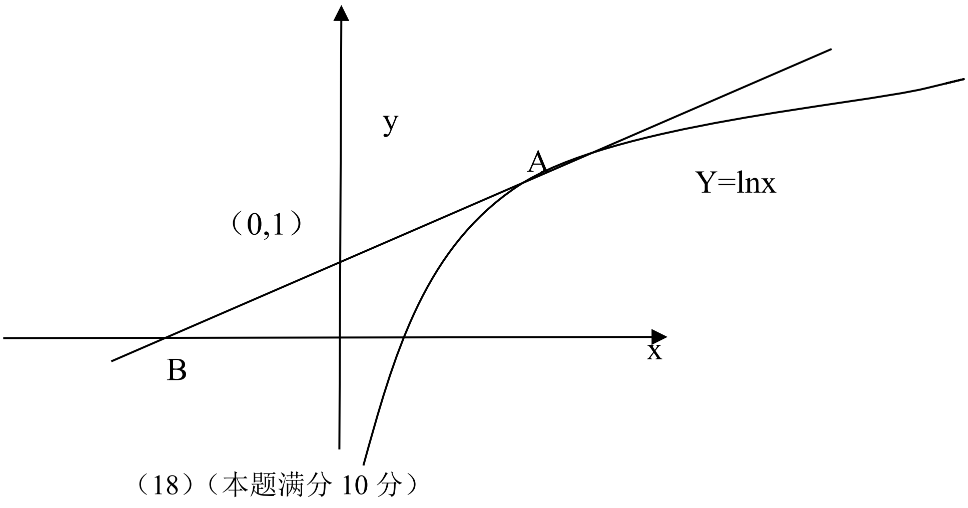
（2）若当 $x\to 0$ 时，$f(x)-a$ 是 x^k 的同阶无穷小，求 k

（16）（本题满分 10 分）

求 $f(x,y)=xe-\dfrac{x^2+y^2}{2}$ 的极值。

（17）（本题满分 10 分）

过点（0，1）点作曲线 L：$y=\ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 及 x 轴围成，求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。



（18）（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,d\sigma$，其中区域 D 为曲线 $r=1+\cos\theta\,(0\le\theta\le\pi)$ 与极轴围成。

（19）（本题满分 11 分）已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2e^x$

1）求表达式 $f(x)$

2）求曲线的拐点 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$

（20）（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x \geq 1+\frac{x^2}{2}, -1<x<1$

（21）（本题满分 11 分）

（1）证明方程 $x^n+x^{n-1}+...+x=1(n>1$的整数$)$，在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$内有且仅有一个实根；

（2）记（1）中的实根为 x_n，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限。

（22）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求 $|A|$

（Ⅱ）已知线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，求 a，并求 $Ax=b$ 的通解。

（23）（本题满分 11 分）三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & a\end{pmatrix}$，$A^T$ 为矩阵 A 的转置，已知 $r(A^TA)=2$，且二次型 $f=x^TA^TAx$。

1）求 a

2）求二次型对应的二次型矩阵，并将二次型化为标准型，写出正交变换过程。