2017年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题：1~8小题，每小题4分，共32分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, x>0 \\ b, x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则

(A) $ab=\frac{1}{2}$　(B) $ab=-\frac{1}{2}$　(C) $ab=0$　(D) $ab=2$

（2）设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$ 则

(A) $f(1)>f(-1)$　(B) $f(1)<f(-1)$

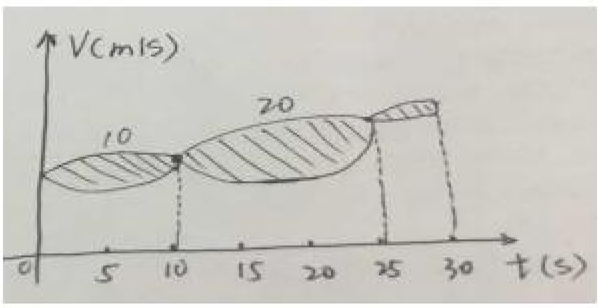
(C) $|f(1)|>|f(-1)|$　(D) $|f(1)|<|f(-1)|$

（3）函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $n(1,2,2)$ 的方向导数为（ ）

(A)12　(B)6　(C)4　(D)2

（4）甲乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方10（单位:m）处,如下图中，实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$ （单位:m/s）虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为10，20，3，计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0（单位:s）,则

(A) $t_0=10$　(B) $15<t_0<20$　(C) $t_0=25$　(D) $t_0>25$



（5）设α为 n 维单位列向量，E 为 n 阶单位矩阵，则

(A) $E-\alpha\alpha^T$不可逆　(B) $E+\alpha\alpha^T$不可逆

(C) $E+2\alpha\alpha^T$不可逆　(D) $E-2\alpha\alpha^T$不可逆

（6）已知矩阵$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$　$B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，则

(A) A 与 C 相似，B 与 C 相似

(B) A 与 C 相似，B 与 C 不相似

(C) A 与 C 不相似，B 与 C 相似

(D) A 与 C 不相似，B 与 C 不相似

（7）设A,B为随机事件，若$0<P(A)<1,0<P(B)<1$,则$P\left(A\middle|B\right)>P\left(A\middle|\overline{B}\right)$的充分必要条件是（ ）

A. $P\left(B\middle|A\right)>P\left(B\middle|\overline{A}\right)$　B $P\left(B\middle|A\right)<P\left(B\middle|\overline{A}\right)$

C. $\mathrm{P}\left(\overline{B}\middle|A\right)>\mathrm{P}\left(B\middle|\overline{A}\right)$　D. $\mathrm{P}\left(\overline{B}\middle|A\right)<\mathrm{P}\left(B\middle|\overline{A}\right)$

（8）设$X_1,X_2......X_n(n\geq 2)$来自总体 $N(\mu,1)$的简单随机样本，记$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

则下列结论中不正确的是：

(A) $\sum(X_i-\mu)^2$服从χ^2分布

(B) $2(X_n-X_1)^2$服从χ^2分布

(C) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$服从$\chi^2$分布

(D) $n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从χ^2分布

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。

（9） 已知函数$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$,则$f^{(3)}(0)=$________

（10）微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$________

（11）若曲线积分 $\int_L \frac{xdx-ay\mathrm{d}y}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $\mathrm{D}=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2<1\right\}$ 内与路径无关，则 $a=$ __

（12）幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间（-1,1）内的和函数 $S(x)=$ ________

（13）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量组

$A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 的秩为

（14）设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准

正态分布函数，则 EX=

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本题满分 10 分）

设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y=f(e^x,cosx)$,求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$，$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$

（16）（本题满分 10 分）

求 $\lim_{n\to k}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

（17）（本题满分 10 分）

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 得极值

（18）（本题满分 10 分）

$f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上具有 2 阶导数，$f(1)>0, \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}<0$

证（1） 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 至少存在一个根

（2） 方程 $f(x)+f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同的实根

（19）（本题满分 10 分）

设薄片型物体 S 是圆锥面 $Z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $Z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任一点弧度为 $u(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。记圆锥与柱面的交线为 C

（1）求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程

（2）求 S 的质量 M

（20）（本题满分 11 分）

三阶行列式 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$

（1）证明 $r(A)=2$

（2）如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 求方程组 $Ax=b$ 的通解

（21）（本题满分 11 分）

设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为 $\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2$ 求 a 的值及一个正交矩阵 Q.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 XY 互独立，且 X 的概率分布为 $P\{X=0\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，Y 概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}2y, 0<y<1\\ 0, \text{其他}\end{cases}$$

(1)求 $P\{Y\le EY\}$ (2)求 $Z=X+Y$ 的概率密度

（23）（本题满分 11 分）

某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 相互独立，且均服从正态分布 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$，该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $z_i = \left|x_i - \mu\right|, \left(i = 1, 2, \cdots, n\right)$，利用 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 估计 σ

(I)求 z_1 的概率密度

(II)利用一阶矩求 σ 的矩估计量

(III)求 σ 的最大似然估计量